Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Inhalt

Übersicht:

- Globale Herleitung
- Lokale Herleitung
- Anfangsrandwertprobleme

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Partielle Differentialgleichungen

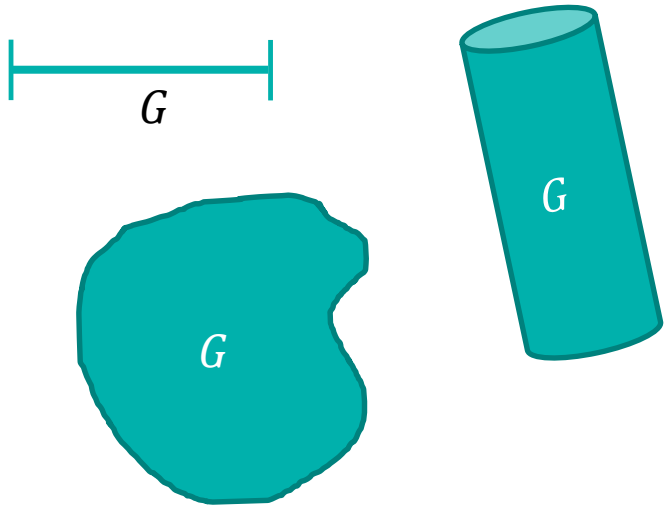
Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

$T(\vec{x}, t)$

Aufgabenstellung und Setting

Wir wollen eine Gleichung herleiten, mit der wir die Wärmeleitung durch Diffusion in Objekten (Festkörper, Gase, Fluide) beschreiben und berechnen können.

Ausgangspunkt ist eine Energiebilanz…



Wir betrachten ein Gebiet $G \in \mathbb{R}^3$ $(n = 1,2,3)$.

In diesem soll am Ort $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zur Zeit $t \geq 0$ die Temperatur $T(\vec{x}, t)$ vorliegen.

In einem Teilintervall, Rechteck oder Quader ΔV ergibt sich dann die resultierende Energie auf Grund der Temperatur zur Zeit t…

$$E_Q = \rho \cdot c_p \cdot T\left(\vec{\xi}, t\right) \cdot \Delta V$$

ρ = Dichte in kg/m^n $(n = 1,2,3)$
c_p = spezifische Wärmekapazität in $J/(kg \cdot K)$

Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Aufstellen der Energiebilanz



Ab jetzt betrachten wir exemplarisch $n = 3$

Wir summieren den Beitrag jedes Quaders und erhalten die Energie auf Grund der Temperatur…

$$E \approx \sum \rho \cdot c_p \cdot T\left(\vec{\xi}, t\right) \cdot \Delta V$$

Wenn wir das Volumen der Quader gegen null gehen lassen ($\Delta V \to 0$) wird aus der Summe ein Volumenintegral…

$$E = \iiint_G \rho \cdot c_p \cdot T(\vec{x}, t)\, dV$$

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Aufstellen der Energiebilanz



Die Temperatur T im Gebiet G kann sich auf zwei Arten ändern…

1. **Wärmefluss am Rand:**

   Es kann Wärme hinzugefügt oder abgegeben werden, wenn das Objekt z.B. mit der Umgebungstemperatur interagiert.

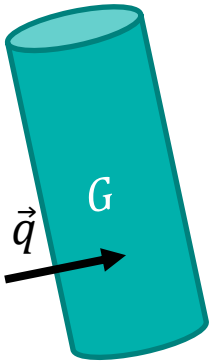
2. **Quellen:**

   Im Objekt können Wärmequellen (oder Senken) vorhanden sein, welche zu Temperaturveränderungen führen.

Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Wärmefluss



Der Wärmestrom wird allgemein durch die Wärmestromdichte $\vec{q}$ beschrieben (in W/m^2). Da der Strom eine Richtung besitzt, handelt es sich um eine vektorielle Größe.



Fourier‘sches Gesetz:

Die Wärmestromdichte hängt wie folgt mit dem Temperaturgradienten zusammen (es entsteht ein Wärmefluss, da Temperaturunterschiede vorliegen)…

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T$$

Bemerkungen:

λ = Wärmeleitfähigkeit in $W/(m \cdot K)$

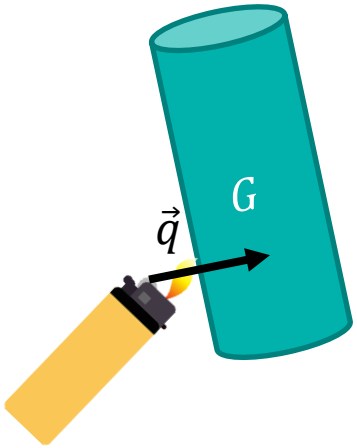
Das Vorzeichen ist negativ, da Wärme von warm nach kalt fließt, der Gradient aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Wärmefluss



Den gesamten Wärmestrom am Rand ∂G erhalten wir, indem wir über die Beiträge am Rand integrieren (summieren)…

$$\dot{Q}_{\text{Fluss}} = -\oiint_{\partial G} \lambda \nabla T \cdot \overrightarrow{dA}$$ Einheit: Watt

Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung



Quellen

Innere Quellen werden mit Q bezeichnet und in der Einheit W/m^3 angegeben. Q ist hierbei eine Funktion des Ortes und kann auch zeitabhängig sein: $Q = Q(\vec{x}, t)$

Den gesamten Beitrag im Volumen G erhalten wir durch Integration (Aufsummieren) von Q über das Volumen…

$$\dot{Q}_{\text{Quelle}} = \iiint_G Q \, dV$$

Einheit: Watt

Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Wärmebilanz



Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen…

Die Energiemenge auf Grund der vorliegenden Temperatur
Wird beschrieben durch…

$$E = \iiint_G \rho \cdot c_p \cdot T(\vec{x}, t)\, dV$$ Einheit: Joule

Die zeitliche Änderung der Energiemenge ergibt sich durch die Zeitableitung. Diese wird hervorgerufen durch Wärmeflüsse und Innere Quellen…

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_G \rho \cdot c_p \cdot T(\vec{x}, t)\, dV = \oiint_{\partial G} \lambda \nabla T \cdot \overrightarrow{dA} + \iiint_G Q\, dV$$

Wird abgezogen („- -“), da positive Wärmeströme bedeuten, dass Energie abgeführt wird

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Gauß'scher Satz



Wir haben folgende Bilanzgleichung…

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_G \rho \cdot c_p \cdot T(\vec{x},t)\,dV = \oiint_{\partial G} \lambda \nabla T \cdot \overrightarrow{dA} + \iiint_G Q\,dV$$

Volumenintegral — Randintegral — Volumenintegral

Um die einzelnen Terme miteinander vergleichen zu können, formen wir das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral um…

$$\oiint_{\partial G} \lambda \nabla T \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_G \operatorname{div}(\lambda \nabla T)\,dV$$

Gauß'scher Satz

Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Vom Integral zur DGL



Mit dem Gauß'schen Satz erhalten wir folgenden Integralausdruck…

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_G \rho \cdot c_p \cdot T(\vec{x},t)\,dV = \iiint_G \operatorname{div}(\lambda \nabla T)\,dV + \iiint_G Q\,dV$$

Wir können Differentiation und Integration vertauschen!

$$\iiint_G \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x},t)\,dV = \iiint_G \operatorname{div}(\lambda \nabla T)\,dV + \iiint_G Q\,dV$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Partielle Differentialgleichungen

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung



Vom Integral zur DGL

Mit dem Gauß‘schen Satz erhalten wir folgenden Integralausdruck…

$$\iiint_G \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t)\, dV = \iiint_G \operatorname{div}(\lambda \nabla T)\, dV + \iiint_G Q\, dV$$

Alle Überlegungen sind unabhängig vom konkreten Volumen G, d.h. die Beziehung gilt für alle möglichen (Teil-)Volumina.

In diesem Fall gilt auch Gleichheit für die Ausdrücke im Integral…

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + Q$$

Wärmeleitungsgleichung in 3d (gilt im gesamten Gebiet $\vec{x} \in G$)

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Analyse der Gleichung



Die Wärmeleitung durch Diffusion wird durch folgende Gleichung für die gesuchte Temperatur beschrieben…

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \text{div}\,(\lambda \nabla T) + Q$$

Wenn λ nicht von $\vec{x}$ abhängt,
Können wir umformen…

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda\ \underbrace{\text{div}\,(\nabla T)} + Q$$

$$= \Delta T = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} T$$

Laplace Operator

Aufgabe:

Berechnen Sie $\text{div}\,(\nabla T) = ?$ …

Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Verschiedene Dimensionen

Wärmeleitungsgleichung in 3d

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \Delta T + Q \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} T \right) + Q$$

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Verschiedene Dimensionen

Wärmeleitungsgleichung in 3d

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \Delta T + Q \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} T \right) + Q$$

Wärmeleitungsgleichung in 2d

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \Delta T + Q \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T \right) + Q$$

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Verschiedene Dimensionen

Wärmeleitungsgleichung in 3d

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \Delta T + Q \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} T \right) + Q$$

Wärmeleitungsgleichung in 2d

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \Delta T + Q \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) = \lambda \ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T \right) + Q$$

Wärmeleitungsgleichung in 1d

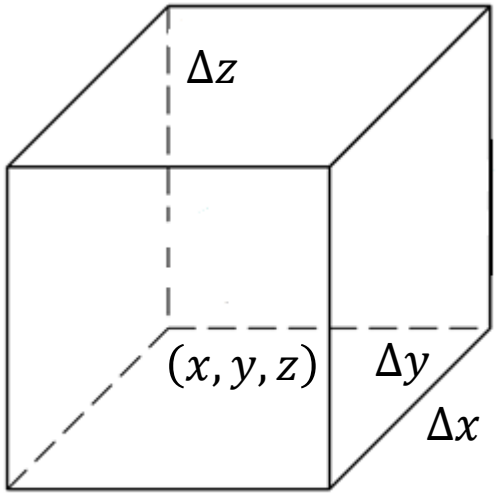
$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T + Q$$

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Alternative Herleitung

Wir gehen ähnlich wie beim Gauß'schen Satz vor und betrachten ein kleines Kontrollvolumen, d.h. einen kleinen Quader.



Wir nutzen wieder die Energieerhaltung aus und stellen eine Bilanzgleichung auf…

Energiemenge auf Grund der Energiespeicherung durch die Temperatur im Kontrollvolumen…

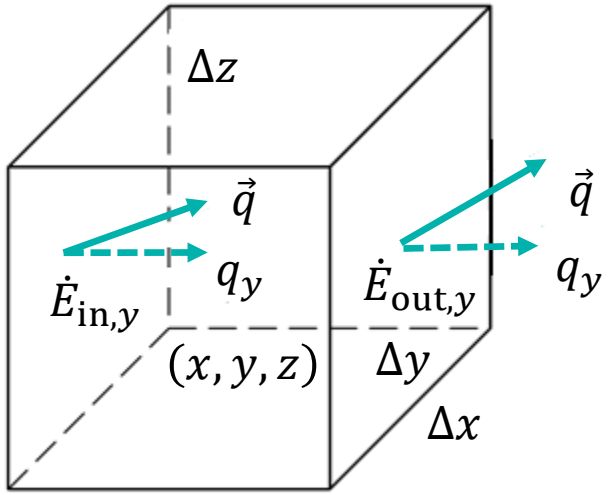
$$E = \rho \cdot c_p \cdot T \cdot \Delta V$$

Die zeitliche Änderung der Energie im Volumina erhalten wir durch die Zeitableitung…

$$\dot{E} = \frac{\partial}{\partial t} E = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T \cdot \Delta V$$

Alternative Herleitung

Wenn Temperaturunterschiede vorliegen, setzt Wärmeleitung über die Randflächen ein.



Wir betrachten alle Randflächen einzeln…

Linke und rechte Seite:

Da wir den Wärmefluss in y-Richtung betrachten, interessiert nur die y-Komponente q_y des Wärmeflusses $\vec{q}$ und wir multiplizieren mit der Fläche um die ausgetauschte Energiemenge zu erhalten…

Links: $\dot{E}_{\mathrm{in},y} = q_y(x,y,z)\Delta x\Delta z$

Rechts: $\dot{E}_{\mathrm{out},y} = q_y(x,y+\Delta y,z)\Delta x\Delta z \approx \left(q_y(x,y,z) + \partial_y q_y(x,y,z)\Delta y\right)\Delta x\Delta z$

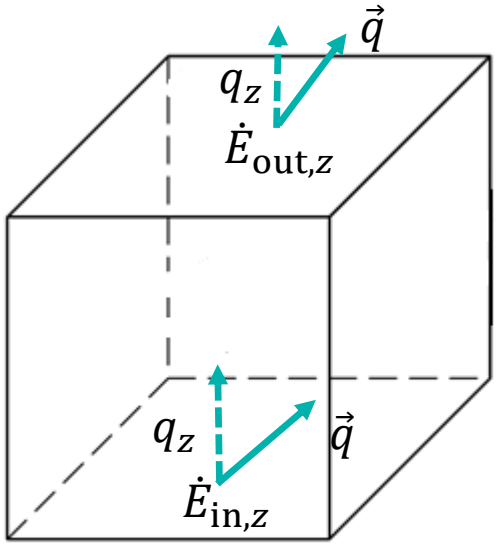
$$\dot{E}_{\mathrm{in},y} - \dot{E}_{\mathrm{out},y} = -\partial_y q_y(x,y,z)\cdot\Delta x\Delta y\Delta z$$

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Alternative Herleitung

Analog für die anderen Seiten…



Obere und untere Seite:

$$\dot{E}_{\mathrm{in},z} - \dot{E}_{\mathrm{out},z} = -\partial_z q_z(x,y,z) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

Vordere und hintere Seite:

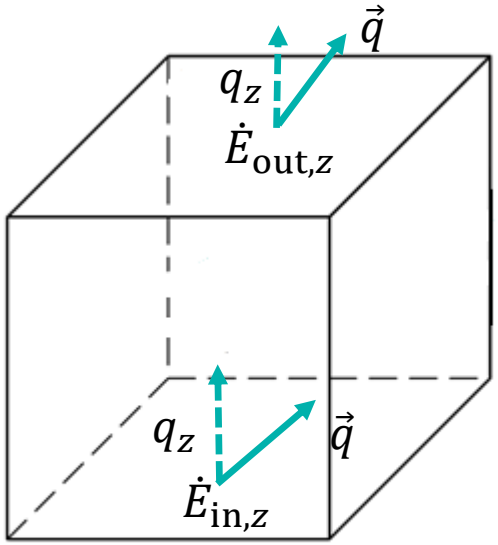
$$\dot{E}_{\mathrm{in},x} - \dot{E}_{\mathrm{out},x} = -\partial_x q_x(x,y,z) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Alternative Herleitung

Wir summieren alle Beiträge auf…



$$\dot{E}_{\mathrm{in},x} - \dot{E}_{\mathrm{out},x} = -\partial_x q_x(x,y,z) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\dot{E}_{\mathrm{in},y} - \dot{E}_{\mathrm{out},y} = -\partial_y q_y(x,y,z) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\dot{E}_{\mathrm{in},z} - \dot{E}_{\mathrm{out},z} = -\partial_z q_z(x,y,z) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

$+$

$$\dot{E}_{\mathrm{in}} - \dot{E}_{\mathrm{out}} = -\underbrace{\left(\partial_x q_x(x,y,z) + \partial_y q_y(x,y,z) + \partial_z q_z(x,y,z)\right)}_{= \operatorname{div} \vec{q}(x,y,z)} \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{= \Delta V}$$

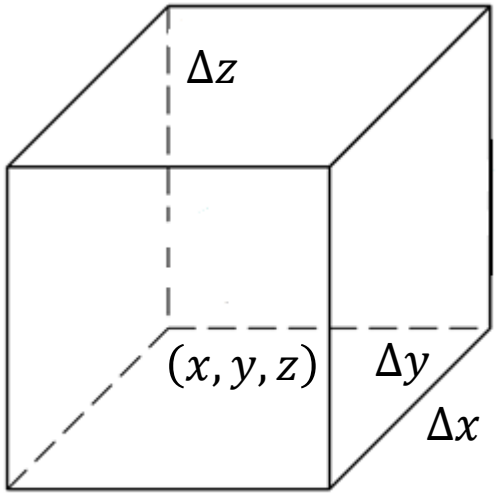
$$\Rightarrow \quad \dot{E} = \dot{E}_{\mathrm{in}} - \dot{E}_{\mathrm{out}} \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T \cdot \cancel{\Delta V} = -\operatorname{div} \vec{q}(x,y,z) \cancel{\Delta V}$$

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Alternative Herleitung

Wir erhalten eine „Vorform“ der Wärmeleitungs-gleichung…



$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T = -\mathrm{div}\, \vec{q}$$

Fourier‘sches Gesetz: $\vec{q} = -\lambda \nabla T$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} T = \mathrm{div}(\lambda \nabla T)$$ (gilt für alle Punkte $\vec{x} \in G$)

Wärmeleitungsgleichung in 3D (ohne innere Quellen)

Partielle Differentialgleichungen

Wärmeleitungsgleichung

Zusammenfassung

Wir haben auf zwei verschiedene Arten die Wärmeleitungsgleichung, welche die Wärmeleitung durch Diffusion in Objekten (Festkörper, Gase, Fluide) beschreibt, hergeleitet…

Global:

Wir betrachten das Gebiet und die Energieänderung durch Wärmeströme am Rand des Gebietes. Hierbei erhalten wir Oberflächen- und Volumenintegrale.

Lokal:

Wir betrachten für ein Kontrollvolumen die Energieänderung durch Wärmeströme am Rand des Gebietes. Durch Grenzübergang wird das Volumen zu einem Punkt und wir erhalten eine DGL in jedem Punkt.